1. Вычислить неопределенные интегралы.

А)

$$\int \frac{2x^2+x-1}{x^2}dx=\int \frac{2x^2}{x^2}dx+\int \frac{x}{x^2}dx-\int \frac{1}{x^2}dx=$$

$$=2\int dx+\int \frac{1}{x}dx-\int x^{-2}dx=2x+\ln|x|-\frac{x^{-1}}{-1}+C=$$

$$=2x+\ln|x|+\frac{1}{x}+C$$

Б) $\int x\cos^2(x)\,dx=$

$$\cos^2(x)=\frac{\cos(2x)+1}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\int x\left(\cos(2x)+1\right)dx=\frac{1}{2}\int x\cos(2x)\,dx+\frac{1}{2}\int xdx=\frac{1}{4}\int x\cos(2x)\,d(2x)+\frac{1}{2}\frac{x^2}{2}+C=$$

$$=\frac{1}{4}\int xd\sin(2x)+\frac{x^2}{4}+C=$$

Применяем формулу интегрирования по частям

$$\int udv=uv-\int vdu$$

$$=\frac{1}{4}\left(x\sin(2x)-\int \sin(2x)\,dx\right)+\frac{x^2}{4}+C=\frac{1}{4}x\sin(2x)-\frac{1}{4}\int \sin(2x)\,dx+\frac{x^2}{4}+C=$$

$$=\frac{1}{4}x\sin(2x)-\frac{1}{8}\int \sin(2x)\,d(2x)+\frac{x^2}{4}+C=\frac{1}{4}x\sin(2x)+\frac{1}{8}\cos(2x)+\frac{x^2}{4}+C$$

В)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x-3}}=\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2\cdot 2x+4-4-3}}=$$

$$=\int \frac{dx}{\sqrt{\left(x^2-2\cdot 2x+4\right)-7}}=\int \frac{dx}{\sqrt{(x-2)^2-7}}=\int \frac{d(x-2)}{\sqrt{(x-2)^2-7}}=$$

Замена $x-2=t$

$$=\int \frac{dt}{\sqrt{t^2-7}}=\ln\left|t+\sqrt{t^2-7}\right|+C=\ln\left|x-2+\sqrt{x^2-4x-3}\right|+C$$

Г) $\int \frac{dy}{\sqrt{e^y+1}}=$

Замена

$$e^y=t,\quad y=\ln(t),\ dy=d\ln(t)=\frac{dt}{t}$$

$$=\int \frac{dt}{t\sqrt{t+1}}=$$

Замена $t+1=g^2,\ t=g^2-1,\ \ dt=2gdg$

$$=\int \frac{2gdg}{\left(g^2-1\right)g}=2\int \frac{dg}{g^2-1}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{g-1}{g+1}\right|+C=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{t+1}-1}{\sqrt{t+1}+1}\right|+C=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{e^y+1}-1}{\sqrt{e^y+1}+1}\right|+C$$

Д) $\int \cos(2x)\cos(3x)\,dx=$

Воспользуемся формулой

$$\cos(\alpha)\cos(\beta)=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta))$$

$$=\frac{1}{2}\int\cos(2x-3x)\,dx+\frac{1}{2}\int\cos(2x+3x)\,dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int\cos(x)\,dx+\frac{1}{2}\int\cos(5x)\,dx=$$

$$=\frac{1}{2}\sin(x)+\frac{1}{10}\int\cos(5x)\,d(5x)+C=$$

$$=\frac{1}{2}\sin(x)+\frac{1}{10}\sin(5x)+C$$

13. Вычислить определенный интеграл

$$\int_0^2\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx=$$

Замена

$$x^2-1=g^2,\quad x=\sqrt{g^2+1},\ dx=d\sqrt{g^2+1}=\frac{gdg}{\sqrt{g^2+1}}$$

При замене пределы интегрирования не меняем, они остаются для переменной x, то есть после нахождения первообразной мы сделаем обратную замену, после чего и подставим значение.

$$=2\int_0^2\frac{g\,gdg}{\sqrt{g^2+1}\sqrt{g^2+1}}=2\int_0^2\frac{g^2\,dg}{g^2+1}=2\int_0^2\frac{g^2+1-1}{g^2+1}dg=$$

$$=2\int_0^2\frac{g^2+1}{g^2+1}dg-2\int_0^2\frac{1}{g^2+1}dg=2\int_0^2 dg-2\int_0^2\frac{1}{g^2+1}dg=$$

$$=2\,g\Big|_0^2-2arctg(g)\Big|_0^2=2\sqrt{x^2-1}\Big|_0^2-2arctg\left(\sqrt{x^2-1}\right)\Big|_0^2=$$

$$=2\left(\sqrt{4-1}-\sqrt{0-1}\right)-2\left(arctg\left(\sqrt{3}\right)-arctg\left(\sqrt{-1}\right)\right)$$

Это выражение неопределено в действительных числах, т.к. присутствуют корни квадратные из отрицательных чисел, возможно опечатка у условии.

Б) $\int_0^1\frac{x}{(x^2+1)^2}dx=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{dx^2}{(x^2+1)^2}=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{d(x^2+1)}{(x^2+1)^2}=$

Замена

$x^2+1=t$

Пределы интегрирования все так же не меняем

$$=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{dt}{t^2}=\frac{1}{2}\int_0^1 t^{-2}dt=\frac{1}{2}\frac{t^{-1}}{-1}\Big|_0^1=-\frac{1}{2}\frac{1}{t}\Big|_0^1=-\frac{1}{2}\frac{1}{x^2+1}\Big|_0^1=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)=\frac{1}{2}$$

В)

$$\int_0^\pi x^3\sin(x)\,dx=-\int_0^\pi x^3 d\cos(x)=$$

Применяем формулу интегрирования по частям

$$\int u dv = uv - \int v du$$

$$= -\left(x^3 \cos(x)\Big|_0^\pi - \int_0^\pi \cos(x)\, d\, x^3 \right) = -\pi^3 \cos(\pi) + 0\cos(0) + 3\int_0^\pi x^2 \cos(x)\, d\, x =$$

$$= \pi^3 + 3\int_0^\pi x^2 \cos(x)\, d\, x = \pi^3 + 3\int_0^\pi x^2 d \sin(x) =$$

Еще раз по частям

$$= \pi^3 + 3\left(x^2 \sin(x)\Big|_0^\pi - \int_0^\pi \sin(x)\, dx^2 \right) =$$

$$= \pi^3 + 3\left(\pi^2 \sin(\pi) - 0\sin(0) - \int_0^\pi 2x \sin(x)\, dx \right) =$$

$$= \pi^3 - 6\int_0^\pi x \sin(x)\, dx =$$

И еще раз по частям

$$= \pi^3 + 6\int_0^\pi x d\cos(x) = \pi^3 + 6\left(x\cos(x)\Big|_0^\pi - \int_0^\pi \cos(x)\, dx \right) =$$

$$= \pi^3 + 6\left(\pi\cos(\pi) - 0\cos(0) - \sin(x)\Big|_0^\pi \right) =$$

$$= \pi^3 + 6\left(-\pi - \sin(\pi) + \sin(0) \right) = \pi^3 - 6\pi$$

26. Найти частные производные до второго порядка включительно заданных функций

$$z = \sqrt{2xy + y^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(\sqrt{2xy + y^2} \right)'_x = \frac{1}{2\sqrt{2xy + y^2}} \left(2xy + y^2 \right)'_x = \frac{y}{\sqrt{2xy + y^2}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(\sqrt{2xy + y^2} \right)'_y = \frac{1}{2\sqrt{2xy + y^2}} \left(2xy + y^2 \right)'_y = \frac{x + y}{\sqrt{2xy + y^2}}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(\frac{y}{\sqrt{2xy + y^2}} \right)'_x = y\left(\left(2xy + y^2 \right)^{\frac{-1}{2}} \right)'_x = -\frac{y}{2}\left(2xy + y^2 \right)^{\frac{-3}{2}} \left(2xy + y^2 \right)'_x =$$

$$= -\frac{y^2}{\left(2xy + y^2 \right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \left(\frac{x + y}{\sqrt{2xy + y^2}} \right)'_y = \frac{\sqrt{2xy + y^2} - (x + y)\dfrac{2x + 2y}{2\sqrt{2xy + y^2}}}{2xy + y^2} =$$

$$= \frac{2xy + y^2 - (x + y)^2}{\left(2xy + y^2 \right)^{3/2}} = \frac{2xy + y^2 - x^2 - 2\tilde{o}\acute{o} - y^2}{\left(2xy + y^2 \right)^{3/2}} = \frac{-x^2}{\left(2xy + y^2 \right)^{3/2}}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \left(\frac{y}{\sqrt{2xy + y^2}} \right)'_y = \frac{\sqrt{2xy + y^2} - y\dfrac{2x + 2y}{2\sqrt{2xy + y^2}}}{2xy + y^2} =$$

$$= \frac{2xy + y^2 - y(x + y)}{\left(2xy + y^2\right)^{3/2}} = \frac{2xy + y^2 - \tilde{o}\acute{o} - y^2}{\left(2xy + y^2\right)^{3/2}} = \frac{xy}{\left(2xy + y^2\right)^{3/2}}$$

35. Найти градиент функции в точке.

А) $u = x^2 + v^2 - z^2 \quad M($

$$grad\, u|_M = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M i + \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_M j + \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_M k =$$

$$= \left.\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 + y^2 - z^2\right)\right|_M i + \left.\frac{\partial}{\partial y}\left(x^2 + y^2 - z^2\right)\right|_M j + \left.\frac{\partial}{\partial z}\left(x^2 + y^2 - z^2\right)\right|_M k =$$

$$= \left.(2x)\right|_M i + \left.(2y)\right|_M j + \left.(-2z)\right|_M k =$$

$$= 4i + 0j - 6k$$

Б) $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \qquad M(2, 0, 3)$

$$grad\, u|_M = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M i + \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_M j + \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_M k =$$

$$= \left.\frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)\right|_M i + \left.\frac{\partial}{\partial y}\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)\right|_M j + \left.\frac{\partial}{\partial z}\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)\right|_M k =$$

$$= \left.\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right)\right|_M i + \left.\left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right)\right|_M j + \left.\left(\frac{2z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right)\right|_M k =$$

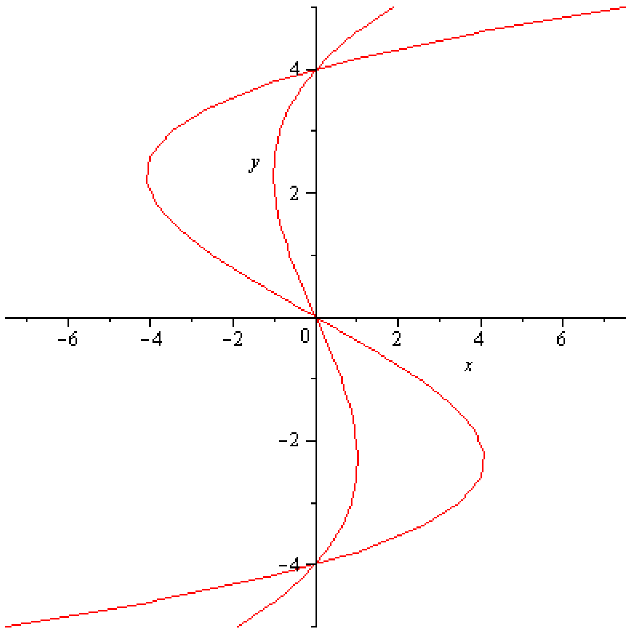
$$= \frac{2}{\sqrt{13}} i + 0j + \frac{3}{\sqrt{13}} k$$

53. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$6x = y^3 - 16y, \quad 24x = y^3 - 16y$

Построим графики функций

$$x = \frac{y^3 - 16y}{6}, \quad x = \frac{y^3 - 16y}{24}$$



Для упрощения вычислений будем интегрировать вдоль оси ОУ, причем найдем площадь фигуры, расположенной во второй координатной четвери, а для ответа на вопрос задачи умножим ее на два.

$$\int_0^4 \left(\frac{y^3 - 16y}{24} - \frac{y^3 - 16y}{6} \right) dy = \int_0^4 \left(\frac{y^3 - 16y - 4y^3 + 64y}{24} \right) dy =$$

$$= \int_0^4 \left(\frac{-3y^3 + 48y}{24} \right) dy = -\frac{3}{24}\int_0^4 y^3 dy + \frac{48}{24}\int_0^4 y dy =$$

$$= -\frac{1}{8}\frac{y^4}{4}\Big|_0^4 + 2\frac{y^2}{2}\Big|_0^4 = -\frac{1}{32}256 + 16 = -8 + 16 = 8$$

$S = 2\cdot 8 = 16$

Ответ: $S = 16$