Найти все значения параметра а, при которых неравенство не имеет положительных решений.

$$x+\frac{7a^2+a-2}{x+a+1}<7a-1$$

Решение:

Начнем жить по воле волн. Делать то, что можно, т.е. переносить всё в одну сторону и приводить к общему знаменателю.

$$x+1-7a+\frac{7a^2+a-2}{x+a+1}<0$$

Здесь можно сделать небольшую замену, чисто эстетическую $x+1=t$, но требование «не имеет положительных решений» перейдет к переменной t как «не имеет решений, больших 1».

$$t-7a+\frac{7a^2+a-2}{t+a}<0$$
$$\frac{(t-7a)(t+a)+7a^2+a-2}{t+a}<0$$
$$\frac{t^2+ta-7ta-7a^2+7a^2+a-2}{t+a}<0$$
$$\frac{t^2+ta-7ta+a-2}{t+a}<0$$
$$\frac{t^2-6at+a-2}{t+a}<0$$

Естественно, когда мы видим квадратный трехчлен, мы пробуем разложить его на сомножители. Вообще, если бы тут не было параметра, была бы дробь с многочленами, которую мы бы легко решили методом интервалов. Да хоть бы и есть параметр, мы все равно так попробуем. Итак, числитель:

$$t^2-6at+a-2=0$$
$$D=36a^2-4(a-2)=36a^2-4a+8$$

И немного отвлечемся, проверим, что там со знаком дискриминанта, найдя уже его дискриминант. Дискриминант дискриминанта.

$$36a^2-4a+8=0$$
$$D=16-4\cdot 36\cdot 8<0$$

Дискриминант дискриминанта чудесным образом оказался отрицательным, а значит, сам дискриминант всегда принимает только положительные значения, а значит, что числитель нашей дроби всегда имеет корни и разложится на, пусть и страшненькие, но два сомножителя. Итак, заново:

$t^2 - 6at + a - 2 = 0$

$D = 36a^2 - 4(a-2) = 36a^2 - 4a + 8$

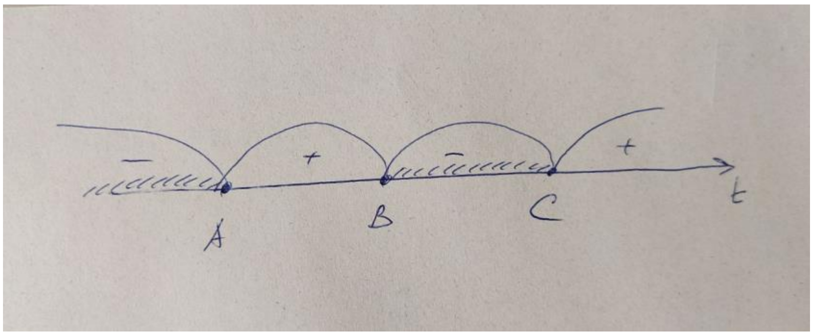
$t_{1,2} = \dfrac{6a \pm \sqrt{36a^2 - 4a + 8}}{2} = \dfrac{6a \pm 2\sqrt{9a^2 - a + 2}}{2} = 3a \pm \sqrt{9a^2 - a + 2}$

Разложим числитель на сомножители и неравенство примет вид:

$$\frac{\left(t - \left(3a + \sqrt{9a^2 - a + 2}\right)\right)\left(t - \left(3a - \sqrt{9a^2 - a + 2}\right)\right)}{t + a} < 0$$

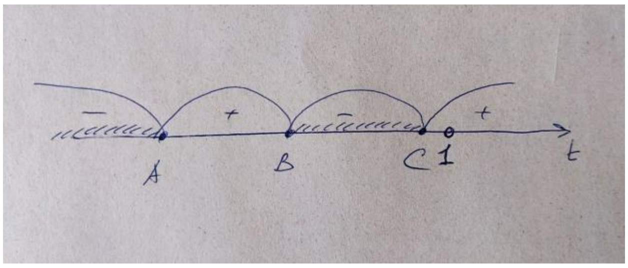
Итак, если бы у нас не было параметра, а были бы числа, ну, допустим, вот так:

$\dfrac{(t-A)(t-B)}{t-C} < 0$, то мы бы спокойненько нанесли их на числовую прямую, расставили бы вот так знаки и выбрали бы вот те интервалы, соответствующие знаку неравенства «<».



НО!! Нам же надо, чтобы не было корней, больших 1. Поэтому число С должно лежать левее 1, или совпадать с ней, чтоб интервал (В;С) ни одной точкой не залезал за 1. Кстати, картинка не очень правильная, точки должны быть выколотыми, а не замазанными, т.к. неравенство строгое, но мне лень перечерчивать.

Итак, вот так должно быть:



У нас три точки: $t_1 = 3a - \sqrt{9a^2 - a + 2},\ t_2 = 3a + \sqrt{9a^2 - a + 2},\ t_3 = -a$

Осталось понять, кто лежит правее. Из этого соревнования можно смело исключить t_1, т.к. оно точно лежит левее t_2. Так кто же, t_2 или t_3?

Да в общем то все равно. Они оба должны лежать левее единицы , или совпадать с ней.

Составим соответствующую систему.

$$\begin{cases} 3a+\sqrt{9a^2-a+2}\le 1 \\ -a\le 1 \end{cases}$$

Решим отдельно первое, оно посложнее, с иррациональностью

$$3a+\sqrt{9a^2-a+2}\le 1$$
$$\sqrt{9a^2-a+2}\le 1-3a$$

Возводить в квадрат можно обе части тогда и только тогда, когда они одного знака, в данном случае правая часть должна быть неотрицательна, т.е. $a\le\frac{1}{3}$. Второго случая быть не может, т.к. корень не может быть меньше отрицательного числа.

$$9a^2-a+2\le 1-6a+9a^2$$
$$-a+2\le 1-6a$$
$$5a\le -1$$
$$a\le -\frac{1}{5}$$

Что полностью удовлетворяет ограничению возведения в в квадрат.

Вернемся к системе:

$$\begin{cases} a\le -\frac{1}{5} \\ a\ge -1 \end{cases}.$$

Это и будет ответом в задаче.

Ответ: $-1\le a\le -\frac{1}{5}$