Найти все значения параметра а, при каждом из которых уравнение

$$\left|x^2-a^2\right|=\left|x+a\right|\sqrt{x+a^2-2a}$$

имеет ровно два различных корня.

Решение:

Невооруженным глазом видна разность квадратов, потому перенесем все влево.

$$\left|x^2-a^2\right|-\left|x+a\right|\sqrt{x+a^2-2a}=0$$
$$\left|(x-a)(x+a)\right|-\left|x+a\right|\sqrt{x+a^2-2a}=0$$
$$\left|x+a\right|\left(\left|x-a\right|-\sqrt{x+a^2-2a}\right)=0$$

Произведение двух сомножителей равно нулю … бла-бла-бла

Получаем первый корень:

$$\left|x+a\right|=0$$
$$x=-a$$

Теперь со вторым сомножителем:

$$\left|x-a\right|-\sqrt{x+a^2-2a}=0$$
$$\left|x-a\right|=\sqrt{x+a^2-2a}$$

Возведем обе части равенство в квадрат, избавимся и от модуля и от радикала.

$$x^2-2ax+a^2=x+a^2-2a$$
$$x^2-2ax-x+2a=0$$
$$x(x-2a)-(x-2a)=0$$
$$(x-1)(x-2a)=0$$

Получим еще парочку корней.

$$x=1;\ \ x=2a$$

Итого, без оглядки на ограничения уравнения, получены три корня:

$$x_1=-a;\ \ x_2=2a;\ \ x_3=1$$

Но в задаче требуется, чтобы уравнение имело ровно два различных корня. Значит один должен «пропасть», т.е. два из трех должны быть корнями, а при третьем уравнение должно быть неопределено.

Получим три ситуации:

x_1	x_2	x_3
X	O	O
O	X	O
O	O	X

Рассмотрим первый случай

1) x_1 - не подходит, а x_2, x_3 - подходят.

Определим значения a при которых корень $x_1 = -a$ не подходит. Подставим его в исходное уравнение

$$\left|x^2 - a^2\right| = \left|x + a\right|\sqrt{x + a^2 - 2a}$$
$$\left|a^2 - a^2\right| = \left|-a + a\right|\sqrt{-a + a^2 - 2a}$$
$$0 = 0 \cdot \sqrt{a^2 - 3a}$$

Казалось бы, 0=0, но ведь и подкоренное выражение должно быть неотрицательным. Точнее, здесь, чтоб была непределенность, оно должно быть отрицательным.

$$a^2 - 3a < 0$$
$$a\left(a - 3\right) < 0$$
$$0 < a < 3$$

Т.е. при этих a первый корень не является решением.

Теперь, определим значения параметра, при которых корень x_2 является решением уравнения.

Подставим $x_2 = 2a$ в уравнение и чтоб все было у нас хорошо

$$\left|x^2 - a^2\right| = \left|x + a\right|\sqrt{x + a^2 - 2a}$$
$$\left|4a^2 - a^2\right| = \left|2a + a\right|\sqrt{2a + a^2 - 2a}$$
$$3a^2 = \left|3a\right| \cdot \sqrt{a^2}$$
$$3a^2 = \left|3a\right| \cdot \left|a\right|$$
$$3a^2 = 3a^2$$

Равенство верно при любых значениях a .

Вывод: $x_2 = 2a$ будет решением при любых a .

Теперь, определим значения параметра, при которых корень x_3 является решением уравнения.

Подставим $x_3 = 1$ в уравнение и чтоб все было у нас опять хорошо

$$\left|x^2-a^2\right|=\left|x+a\right|\sqrt{x+a^2-2a}$$
$$\left|1-a^2\right|=\left|1+a\right|\sqrt{1+a^2-2a}$$
$$\left|1-a^2\right|=\left|1+a\right|\sqrt{\left(a-1\right)^2}$$
$$\left|1-a^2\right|=\left|1+a\right|\left|1-a\right|$$
$$\left|1-a^2\right|=\left|1-a^2\right|$$

Равенство верно при любых значениях a .

Вывод: $x_3=1$ будет решением при любых a .

Итог первого случая:

$$\begin{cases}0<a<3\\ -\infty<a<+\infty\Rightarrow\quad 0<a<3\\ -\infty<a<+\infty\end{cases}$$

При этих значениях параметрах будут два решения (второй и третий корень)

Второй и третий случай, т.е. когда не подходит второй и третий корень соответственно, невозможны, т.к. исследование только что показало, что они являются решениями всегда.

Казалось бы, мы готовы дать ответ, но это тот момент, когда мы должны обернуться и добавить частные случаи, и убрать ограничения.

1) Добавим частный случай, когда подходят все три корня, но два из них совпадают.

Из предыдущего понятно, что все три корня являются решением при $a\le 0;\ \ a\ge 3$.

Пусть

$$x_1=x_2$$
$$-a=2a$$
$$a=0$$

Добавим $a=0$ к ответу.

Или пусть

$$x_1=x_3$$
$$-a=1$$
$$a=-1$$

Добавим $a=-1$ к ответу

И последняя пара:

$2a=1$

$a=\frac{1}{2}$

Такое нам не подходит, т.к. все три являются решением при $a\le 0;\ \ a\ge 3$.

2) А теперь уберем из ответа ситуацию, когда уравнение имеет ровно два корня, но они не являются различными

$x_2=2;\ x_2=1$

$2a=1$

$a=\frac{1}{2}$

Но в этом случае мы исключаем из ответа $a=\frac{1}{2}$

С добавлениями и исключениями получим ответ: $\{-1\}\cup\left[0;\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2};3\right)$