

Найти все значения параметра a , при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} ax \geq 2 \\ \sqrt{x-1} > a \\ 3x \leq 2a+11 \end{cases}$$

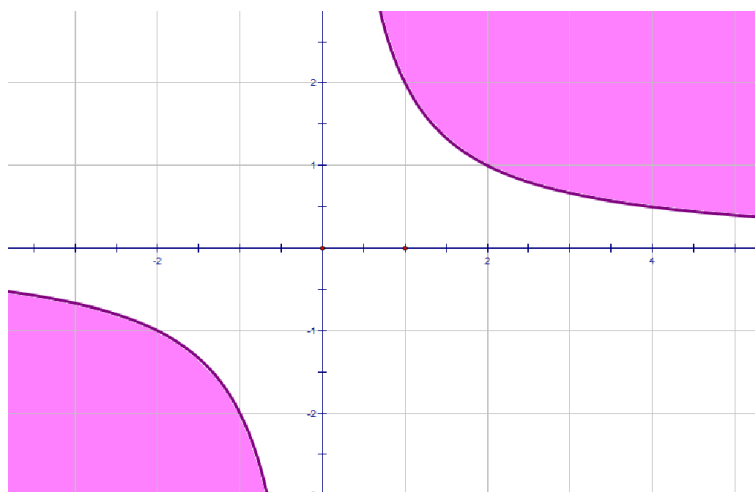
имеет хотя бы одно решение на отрезке $[3; 4]$.

Решение:

Решать будем графически, построив область решения данного неравенства в системе ХОА, т.е. мы пока как бы считаем, что a это не параметр, а переменная, играющая роль функции, ординаты.

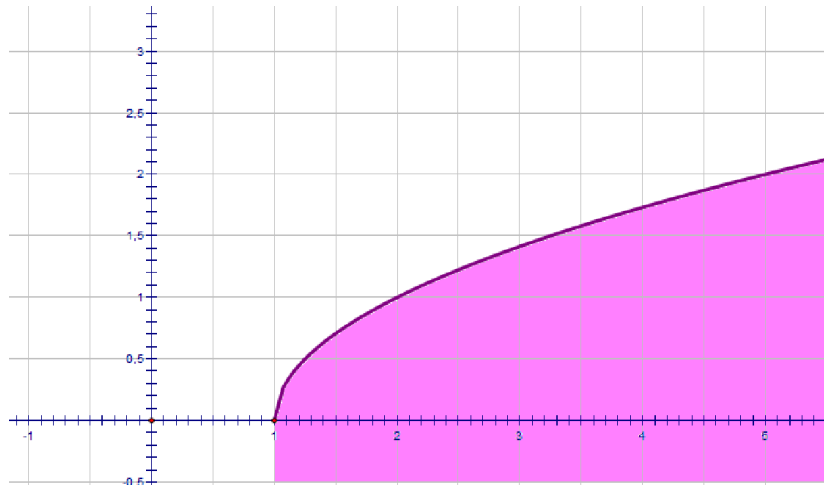
Разберем каждое неравенство и поясним, какая область ему удовлетворяет.

Первое неравенство системы это: $ax \geq 2$. Мы можем построить кривую $a_1 = \frac{2}{x}$, это обычная человеческая гипербола. Но! Если $x > 0$, то из неравенства $ax \geq 2$ мы получим $a \geq \frac{2}{x}$, т.е. нас устраивают точки координатной плоскости, принадлежащие гиперболе и лежащие над ней, а если $x < 0$, то получаем нер-во $a \leq \frac{2}{x}$, то нам подходят точки гиперболы и лежащие под ней точки координатной плоскости.

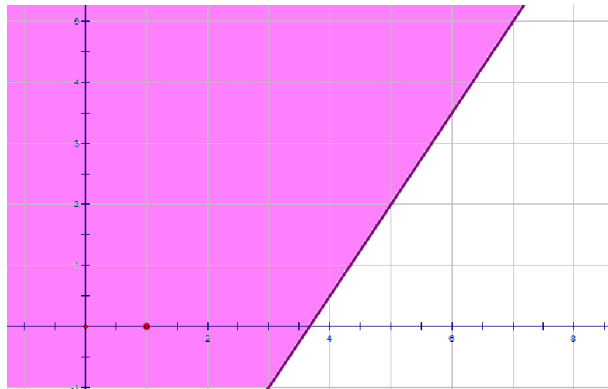


Второе неравенство системы: $\sqrt{x-1} > a$.

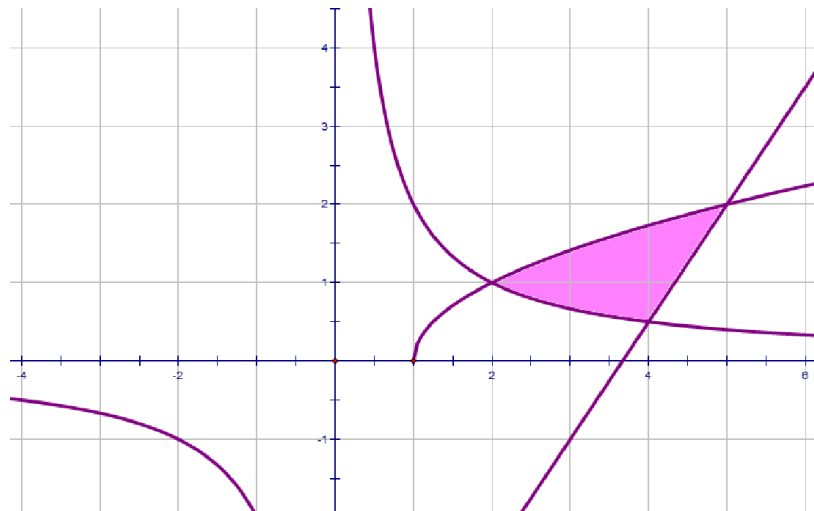
Поменяем части местами для красоты: $a < \sqrt{x-1}$, строим кривую $a_2 = \sqrt{x-1}$ и нас устраивают точки все точки плоскости под кривой.



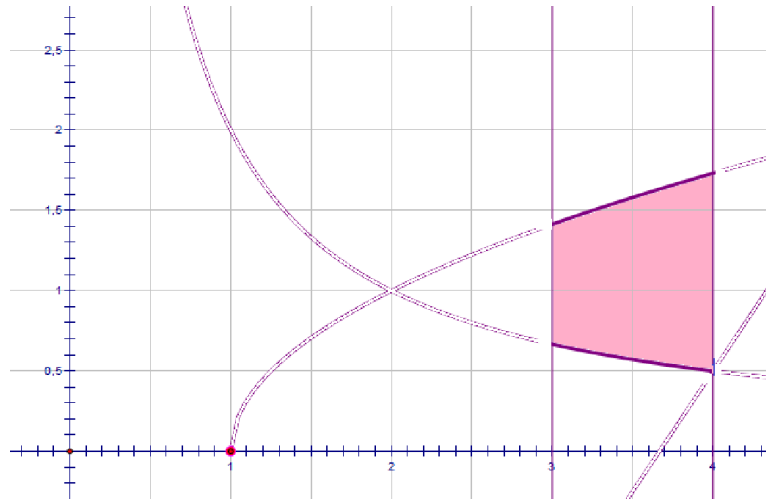
Третье: $3x \leq 2a + 11$, это всего лишь прямая : $a \geq \frac{3x-11}{2}$, а, точнее, точки на и над ней.



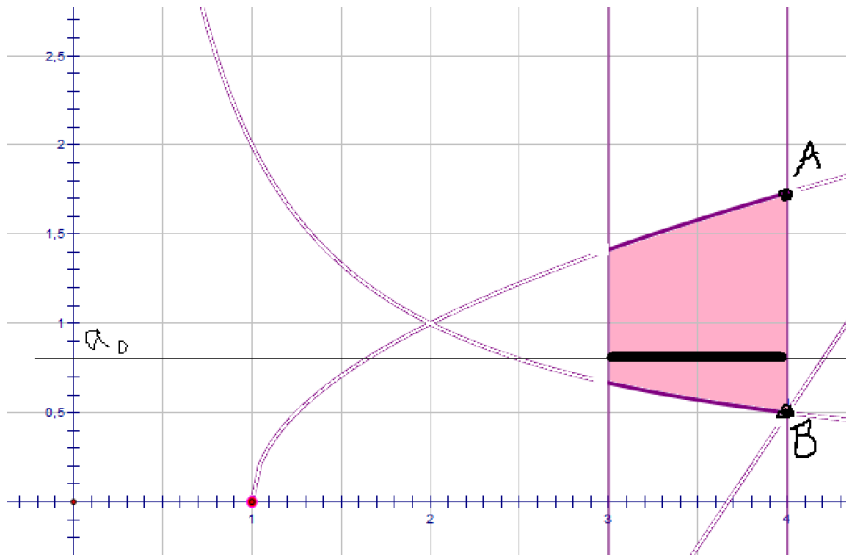
Построим общий график.



А теперь проведем прямые $x = 3$, $x = 4$, т.к. именно на этом отрезке должно быть хотя бы одно решение. И уберем всё, кроме этой полосы.



А теперь вспоминаем, что a - параметр. Пусть $a = a_0$, тогда решением системы будет отрезок, отмеченный на картинке.



И он должен иметь с закрашенной областью хотя бы одну точку, т.е. нас устраивает ситуация, когда прямая $a = a_0$ проходит в любом месте между точками А и В, которая, по странному стечению обстоятельств и дополнительным исследованием, есть точка пересечения графиков

$$x = 4, a_1 = \frac{2}{x}, a_3 = \frac{3x-11}{2}.$$

Осталось найти ординаты этих точек.

$$\text{Точка А это } a_2(4) = \sqrt{4-1} = \sqrt{3}.$$

$$\text{Точка В это } a_1(4) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Далее, так как в условии строгое неравенство $a < \sqrt{x-1}$, то сама точка А нас не устраивает,

$$\text{И ответ: } \frac{1}{2} \leq a < \sqrt{3}$$