2) Найти все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$36^x - (8a+5)6^x + 16a^2 + 20a - 14 = 0$$

имеет единственное решение.

Решение:

Сделаем замену переменной: $6^x = t$, тогда уравнение примет вид:

$$t^2 - (8a+5)t + 16a^2 + 20a - 14 = 0 \quad (*)$$

Это квадратное уравнение. Нам нужен один корень, а квадратное уравнение имеет один корень если $D = 0$. Но это еще не всё. Так как в этой задаче $t = 6^x > 0$ то исходное уравнение будет иметь один корень в том случае, если уравнение (*) имеет два корня, но один из них положительный, а один из них неположительный, т.е. $t_1 \le 0,\ t_2 > 0$.

1) $D = 0$

$$D = (8a+5)^2 - 4(16a^2 + 20a - 14) = 81$$

Т.е. этот случай нам не поможет.

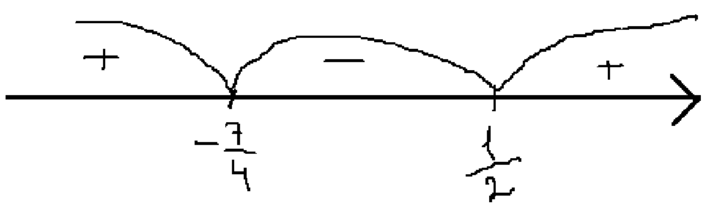
2) $t_1 < 0,\ t_2 > 0$

По теореме Виета:

$$t_1 \cdot t_2 = 16a^2 + 20a - 14$$

Произведение двух сомножителей разных знаков отрицательно

$$\begin{aligned}
&16a^2 + 20a - 14 < 0\\
&8a^2 + 10a - 7 < 0\\
&8a^2 + 10a - 7 = 0\\
&D = 324\\
&a_1 = -\frac{7}{4};\quad a_2 = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$



$$-\frac{7}{4} < a < \frac{1}{2}$$

3) $t_1 = 0$

$$t_1 = \frac{8a + 5 - 9}{2} = 4a - 2 = 0$$

$$a = \frac{1}{2}$$

Итого, ответ: $-\frac{7}{4} < a \le \frac{1}{2}$