№3 Найти все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\frac{2}{x+1}=a|x-3|$$

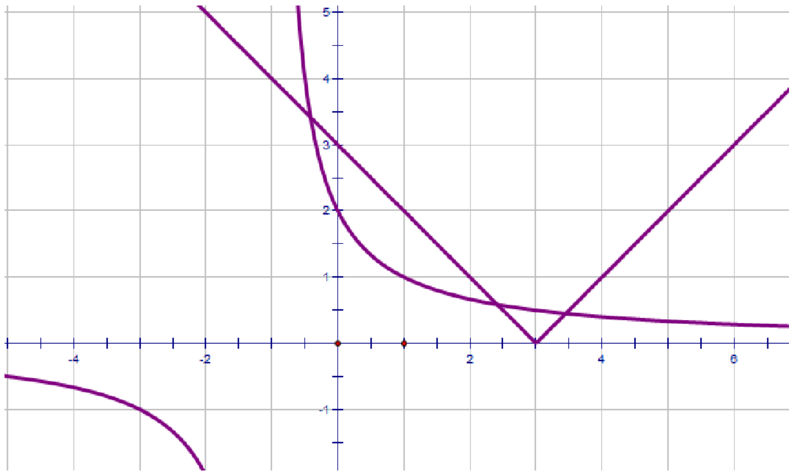
на промежутке $[0;+\infty)$ имеет более двух корней.

Решение:

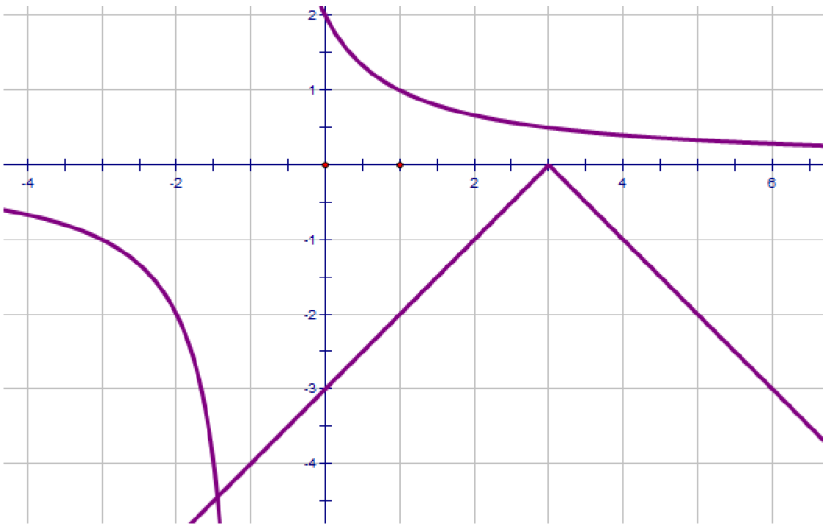
Будем решать это уравнение графически.

Построим графики функций: $y_1=\frac{2}{x+1}$; $y_2=a|x-3|$.

С первым все понятно, это гипербола, сдвинутая влево и растянутая вдоль ОУ в два раза. Вторая это модуль от прямой, т.е. «галочка», с вершиной при $x=3$. Здесь может быть два случая, когда $a>0$, то это выглядит как V, а когда $a<0$, то как Л. Покажем на картинке графики при $a=+1$



и $a=-1$



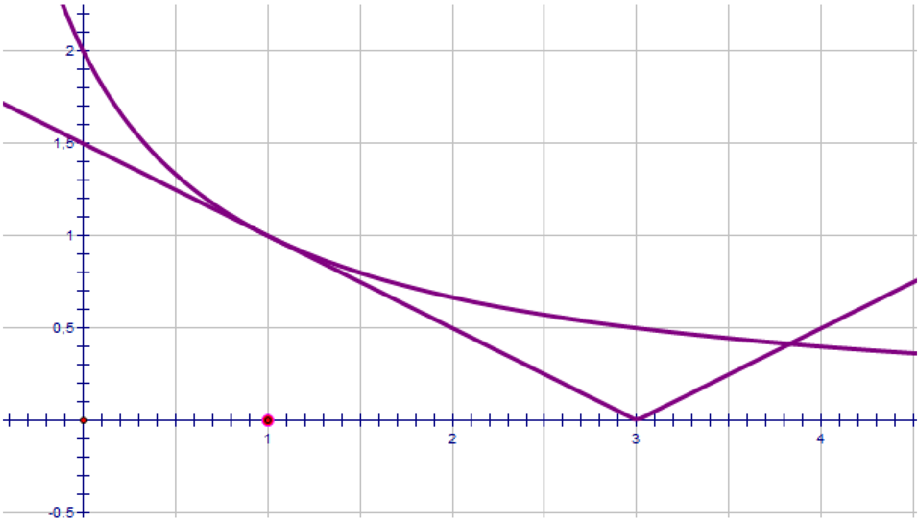
Видно, что во втором случае на промежутке $[0;+\infty)$ корней вообще быть не может, т.е. у нас будет только $a>0$ (равенство 0 не рассматриваем, т.к. в этом случае будет $y_2=0$, вообще корней нет).

Отлично, разберемся с ролью параметра в функции $y_2=a|x-3|$. Здесь это угловой коэффициент, т.е. чем больше a , тем острее будет эта галочка.

Решением уравнения будут точки пересечения графиков, причем они должны быть на промежутке $[0;+\infty)$ на первой картинке действительно видны три корня, т.е. более двух.

Изобразим граничные положения прямой для выгодной нам ситуации.

1) Когда левый луч является касательной к гиперболе, здесь точек пересечения (корней) еще две, но стоит прямой чууууть-чуть повернуться вверх, как их уже будет три.



Левая полупрямая имеет уравнение : $-ax+3a$, приравняем к гиперболе:

$$\frac{2}{x+1}=-ax+3a$$

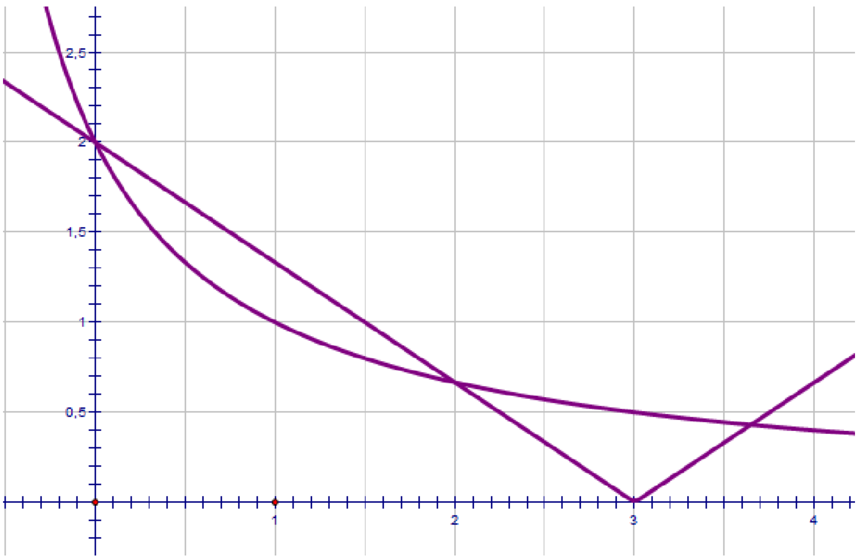
$$\frac{2+(ax-3a)(x+1)}{x+1}=0$$

$$2a^2-a=0$$

$$a=0,\ \ a=\frac{1}{2}$$

Ноль не берем, саму точку касания тоже не берем, т.е. $a>\frac{1}{2}$

2) Левый луч должен пройти через точку (0;2), т.к. там он в последний раз пересечется с гиперболой при $x\geq 0$, если он еще чуть поднимется вверх, то корень получим отрицательный, а оно нам не надо.



Подставим в уравнение прямой (0;2):

$$2 = -a \cdot 0 + 3a$$

$$a = \frac{2}{3}$$

Эта точка нас устраивает, т.к. корень может быть равен 0.

Получим $a \le \frac{2}{3}$

Пересечем с другим случаем и получим ответ:

$$\frac{1}{2} < a \le \frac{2}{3}$$