4) Найти все значения а, при каждом из которых уравнение

$$2^x - a = \sqrt{4^x - a}$$

имеет единственное решение.

Решение :

Сделаем замену $2^x = t$, уравнение примет вид

$$t - a = \sqrt{t^2 - a} \quad (*)$$

Возведем обе части в квадрат.

$$t^2 - 2at + a^2 = t^2 - a$$
$$-2at + a^2 + a = 0$$
$$a\left(-2t + a + 1\right) = 0$$

Произведение двух сомножителей равно нулю, если хотя бы один из них равен нулю.

Разберемся с первым.

$$a = 0$$

Получается, что при $a = 0$ равенство (*) верно при любом значение t, т.е. решение будет не единственное, да и при обратной замене до x решений тоже будет бесконечно много, даже с учетом того, что уравнение должно быть определено.

Вывод: $a = 0$ нам не подходит.

Разберемся со вторым сомножителем:

$$-2t + a + 1 = 0$$
$$t = \frac{a+1}{2}$$

Вот он, тот самый единственный корень. Подставим его в (*) для проверки и накладывания ограничений по области определения функций:

$$\frac{a+1}{2}-a=\sqrt{\left(\frac{a+1}{2}\right)^2-a}$$
$$\frac{1-a}{2}=\sqrt{\frac{a^2+2a+1-4a}{4}}$$
$$\frac{1-a}{2}=\sqrt{\frac{a^2-2a+1}{4}}$$
$$\frac{1-a}{2}=\sqrt{\frac{(a-1)^2}{4}}$$
$$\frac{1-a}{2}=\frac{|a-1|}{2}$$
$$|a-1|=1-a$$

Вспоминаем определение модуля:

$$a-1\le 0$$
$$a\le 1$$

Так, получено первое ограничение. Делаем обратную замену:

$$2^x=\frac{a+1}{2}$$

Это уравнение будет иметь решение, и притом единственное, если

$$\frac{a+1}{2}>0$$
$$a>-1$$

Итого, получены ограничения на параметр:

$$\begin{cases} a>-1 \\ a\le 1 \\ a\ne 0 \end{cases}$$

Ответ: $-1<a\le 1,\ a\ne 0$