

Найдите все положительные значения a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} (|x| - 5)^2 + (y - 4)^2 = 9 \\ (x + 2)^2 + y^2 = a^2 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение:

Конечно же, решать будем графически.

Изобразим на числовой плоскости множество точек, являющееся решением первого уравнения.

А) $x \geq 0$ (ограничение случая), тогда $|x| = x$ и уравнение принимает вид:

$$(x - 5)^2 + (y - 4)^2 = 9$$

Это уравнение окружности с центром в точке $(5; 4)$ и радиусом 3. Все точки этой окружности лежат в правой полуплоскости, т.е. подходят под ограничение случая.

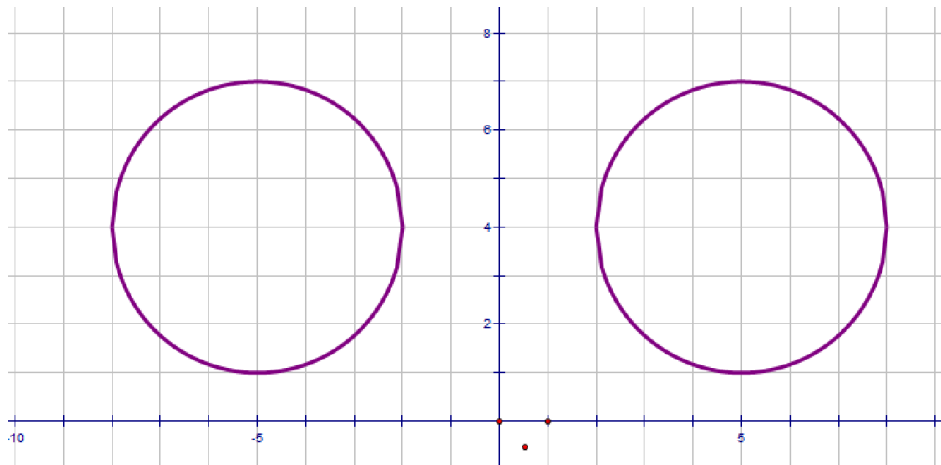
Б) $x < 0$ (ограничение случая), тогда $|x| = -x$ и уравнение принимает вид:

$$(-x - 5)^2 + (y - 4)^2 = 9$$

$$(x + 5)^2 + (y - 4)^2 = 9$$

Это уравнение окружности с центром в точке $(-5; 4)$ и радиусом 3. Все точки этой окружности лежат в левой полуплоскости, т.е. подходят под ограничение случая.

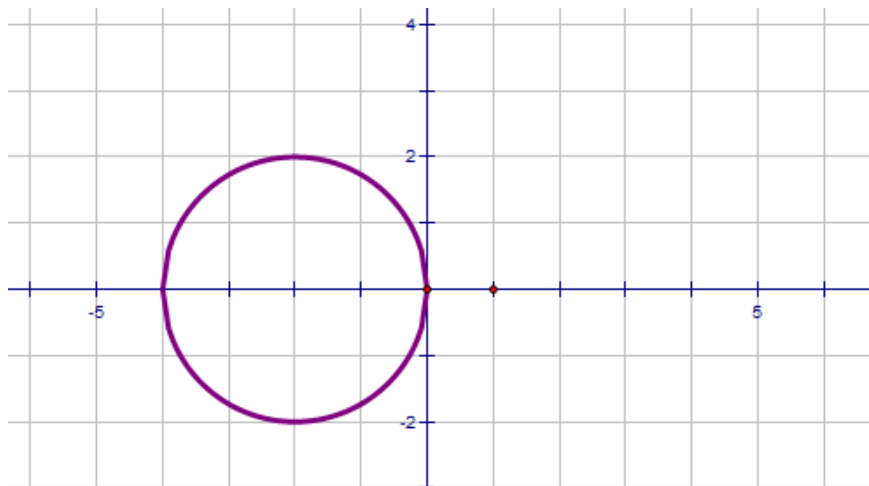
Вывод: Точки, являющиеся решениями первого уравнения это две окружности:



Изобразим на числовой плоскости множество точек, являющееся решением второго уравнения.

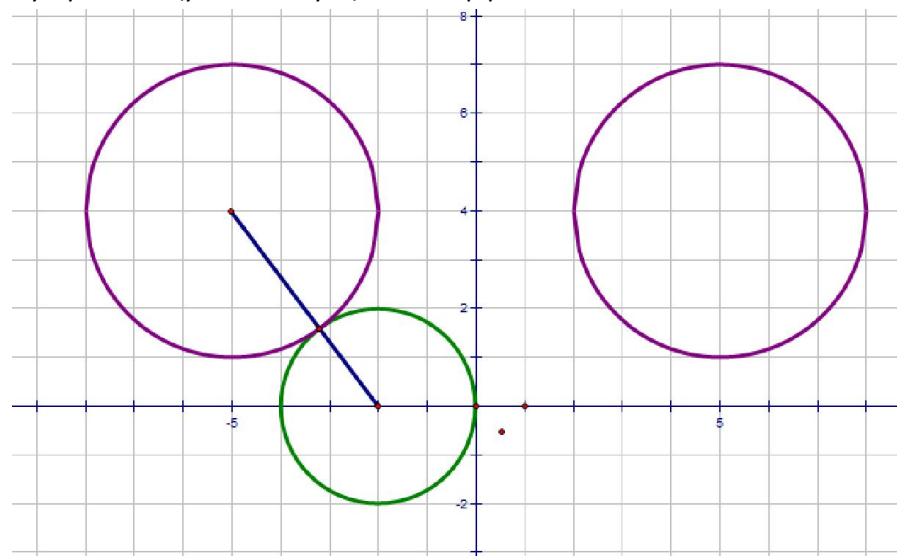
$$(x + 2)^2 + y^2 = a^2$$

Здесь модулей нет, центр окружности это точка $(-2; 0)$, а вот радиус тут равен значению параметра, т.е. a . Например, если $a = 2$, то это будет $(x + 2)^2 + y^2 = 4$



Теперь внимание!, главная мысль решения: для того, чтобы решение системы было единственным, нужно чтобы линия для первого уравнения и линия для второго уравнения пересекались ровно один раз.

Изобразим устраивающую нас ситуацию номер раз:



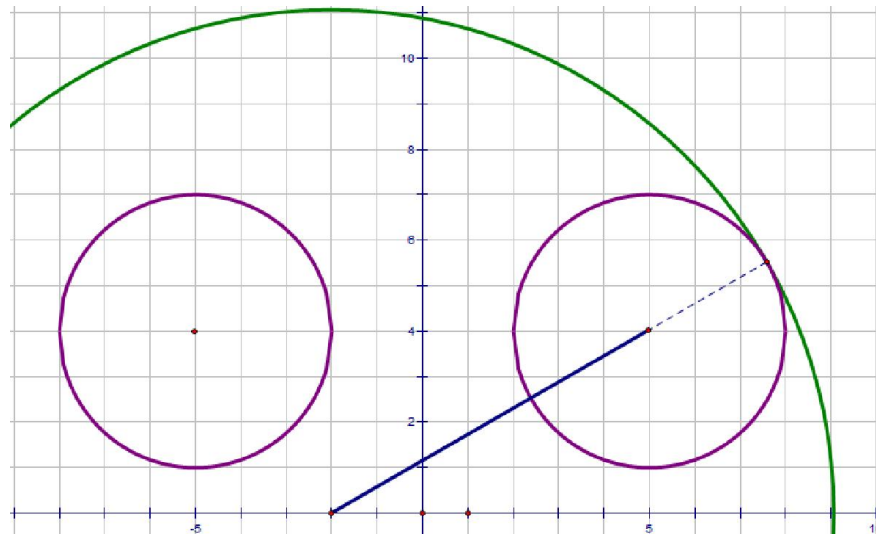
Т.е. окружности касаются. Используем теорему о том, что центры касающихся окружностей и точка их касания лежат на одной прямой, т.е. расстояние от точки $(-5;4)$ до точки $(-2;0)$ должно быть равно сумме радиусов 3 и a .

$$\sqrt{(-5+2)^2 + (4-0)^2} = 3 + a$$

$$5 = 3 + a$$

$$a = 2$$

Изобразим устраивающую нас ситуацию номер два:



Здесь расстояние от точки (5;4) до точки (-2;0) должно быть равно разности радиусов a и 3

$$\sqrt{(5+2)^2 + (4-0)^2} = a - 3$$

$$\sqrt{49+16} + 3 = a$$

$$a = \sqrt{65} + 3$$

Всё, ответ: $a = 3; 3 + \sqrt{65}$