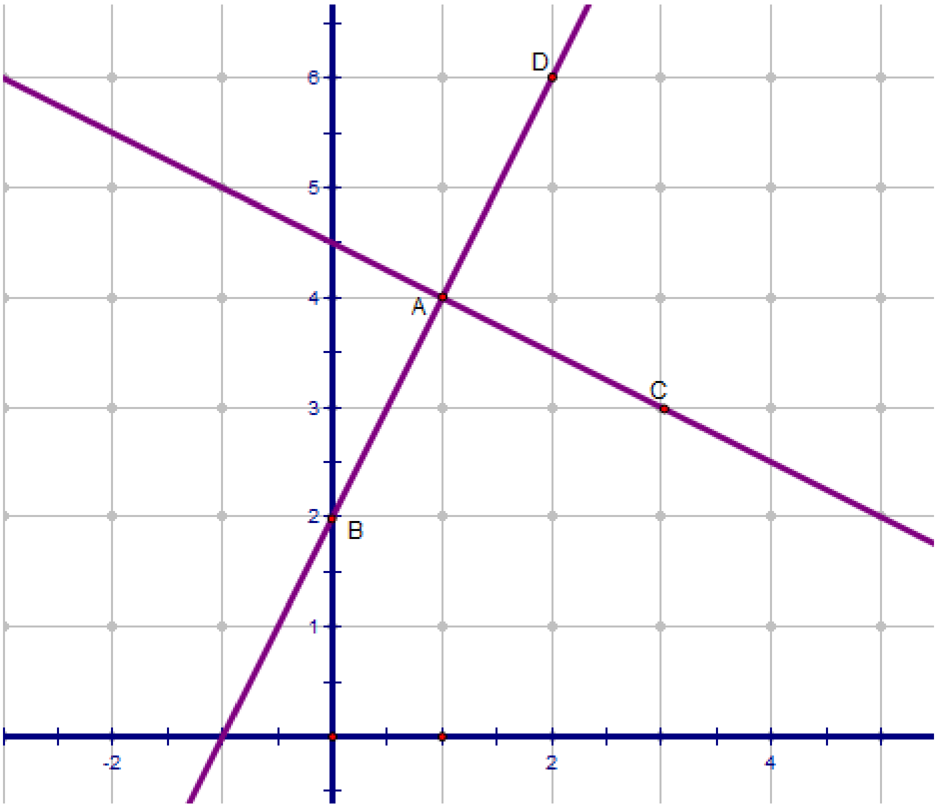
392. Составить уравнение окружностей, проходящих через начало координат и касающихся двух пересекающихся прямых: x+2y-9=0 , 2x-y+2=0.

Решение.

Построим картинку:



Заметим, что эти прямые перпендикулярны, т.к. скалярное произведение из нормальных векторов $n_1=\{1;2\}$ и $n_2=\{2;-1\}$ равно 0.

Значит, нормальный вектор одной прямой будет направляющим вектором для другой. Мелочь, а приятно.

Найдем точке пересечения касательных.

$$\begin{cases} x+2y-9=0 \\ 2x-y+2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-2y+9 \\ -4y+18-y+2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=4 \end{cases}$$

Т.е. точка пересечения прямых A(1;4).

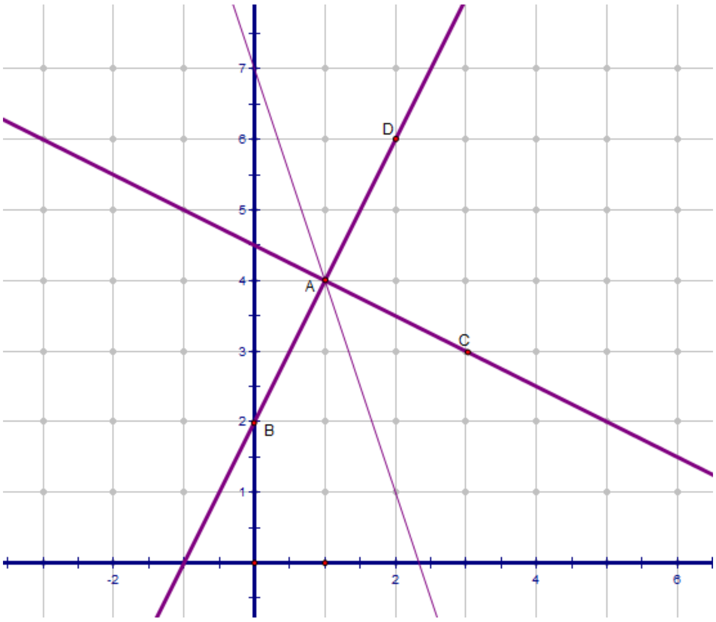
Известно, что центр вписанной в угол окружности лежит на его биссектрисе. Найдем уравнение биссектрисы угла BAC. Применим свойство суммы векторов и тот факт, что диагональ ромба делит угол пополам.

$\overline{AB}=\{-1;-2\}$; $\overline{AC}=\{2;-1\}$

Тогда $\overline{a}=\{-1+2;-2-1\}=\{1;-3\}$ - направляющий вектор биссектрисы. А проходит она, соответственно, через точку A(1;4). Тогда её уравнение имеет вид:

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-4}{-3}$$

Построим эту прямую ($y=-3x+7$)



Центр будет лежать на ней.

Итак, общий вид уравнения окружности $\left(x-x_0\right)^2+\left(y-y_0\right)^2=R^2$

Три неизвестных: координаты центра и радиус. Нужны три факта для трех уравнений.

1) Начало координат лежит на окружности:

   $$\left(0-x_0\right)^2+\left(0-y_0\right)^2=R^2$$

   $$x_0^2+y_0^2=R^2$$

2) Центр лежит на прямой $y=-3x+7$:

   $$y_0=-3x_0+7$$

3) Расстояние от цента окружности $\left(x_0;y_0\right)$ до касательной x+2y-9=0 равно радиусу:

   $$R=\frac{\left|x_0+2y_0-9\right|}{\sqrt{1+2^2}}$$

Запишем систему и решим её

$$\begin{cases} x_0^2+y_0^2=R^2 \\ y_0=-3x_0+7 \\ R=\dfrac{\left|x_0+2y_0-9\right|}{\sqrt{5}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0^2+\left(-3x_0+7\right)^2=R^2 \\ y_0=-3x_0+7 \\ R=\dfrac{\left|x_0+2\left(-3x_0+7\right)-9\right|}{\sqrt{5}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0^2+\left(9x_0^2-42x_0+49\right)=R^2 \\ R=\dfrac{\left|x_0-6x_0+14-9\right|}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 10x_0^2-42x_0+49=R^2 \\ R=\dfrac{\left|-5x_0+5\right|}{\sqrt{5}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10x_0^2-42x_0+49=R^2 \\ R^2=\dfrac{\left(-5x_0+5\right)^2}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10x_0^2-42x_0+49=R^2 \\ R^2=\dfrac{25\left(x-1\right)^2}{5} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 10x_0^2-42x_0+49=R^2 \\ 10x_0^2-42x_0+49=5\left(x_0-1\right)^2 \end{cases}$$

$$10x_0^2-42x_0+49=5\left(x_0^2-2x_0+1\right)$$

$$10x_0^2-42x_0+49=5x_0^2-10x_0+5$$

$$5x_0^2-32x_0+44=0$$

$$D=1024-880=144$$

$$x_0=\frac{32\pm12}{10}=\{4,4;2\}$$

1)

$$x_0=4,4$$

$$R=\frac{\left|-5x_0+5\right|}{\sqrt{5}}=\frac{\left|-5\cdot4,4+5\right|}{\sqrt{5}}=\frac{22-5}{\sqrt{5}}=\frac{17}{\sqrt{5}}$$

$$y_0=-3\cdot4,4+7=-6,2$$

Получим окружность : $\left(x-4,4\right)^2+\left(y+6,2\right)^2=\dfrac{289}{5}$

2)

$$x_0=2$$

$$R=\frac{\left|-5x_0+5\right|}{\sqrt{5}}=\frac{\left|-5\cdot2+5\right|}{\sqrt{5}}=\frac{10-5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$$

$$y_0=-3\cdot2+7=1$$

Получим окружность : $\left(x-2\right)^2+\left(y-1\right)^2=5$

Ответ: $\left(x-4,4\right)^2+\left(y+6,2\right)^2=\dfrac{289}{5}$

$\left(x-2\right)^2+\left(y-1\right)^2=5$