

3,31

Найти общий интеграл дифференциального уравнения

$$y' = \frac{y+2}{2x+y-4}$$

$$\begin{cases} y+2=0 \\ 2x+y-4=0 \end{cases} \quad \begin{cases} y=-2 \\ 2x+y-4=0 \end{cases}$$

Подставим значение $y = -2$ во второе уравнение системы

$$2x + y - 4 = 0$$

$$2x - 2 - 4 = 0$$

$$2x - 6 = 0$$

$$x = 3$$

Решение системы: $x = 3, y = -2$

$$\text{Сделаем замену: } \begin{cases} x = x_0 + 3 \\ y = y_0 - 2 \end{cases}$$

$$\frac{d(y_0 - 2)}{d(x_0 + 3)} = \frac{y_0 - 2 + 2}{2(x_0 + 3) + y_0 - 2 - 4}$$

$$\frac{dy_0}{dx_0} = \frac{y_0}{2x_0 + y_0}$$

$$y_0' = \frac{y_0}{2x_0 + y_0}$$

Получили однородное уравнение, замена $y_0 = tx_0, y_0' = t'x_0 + t$

$$t'x_0 + t = \frac{tx_0}{2x_0 + tx_0}$$

$$t'x_0 + t = \frac{t}{2+t}$$

$$t'x_0 = \frac{t}{2+t} - t$$

$$t'x_0 = \frac{t - 2t - t^2}{2+t}$$

$$\frac{dt}{dx_0} x_0 = \frac{-t - t^2}{2+t}$$

$$\frac{t+2}{t^2+t} dt = -\frac{dx_0}{x_0}$$

$$\int \frac{t+2}{t^2+t} dt = -\int \frac{dx_0}{x_0}$$

$$-\int \frac{dx_0}{x_0} = -\ln(x_0) + C$$

$$\int \frac{t+2}{t^2+t} dt =$$

$$\frac{t+2}{t^2+t} = \frac{t+2}{t(t+1)} = \frac{A}{t+1} + \frac{B}{t} = \frac{At+Bt+B}{t(t+1)} =$$

$$= \frac{t(A+B)+B}{t(t+1)} =$$

$$\begin{cases} A+B=1 \\ B=2 \end{cases} \begin{cases} A=-1 \\ B=2 \end{cases}$$

$$= \frac{-1}{t+1} + \frac{2}{t}$$

$$\int \left(\frac{-1}{t+1} + \frac{2}{t} \right) dt = -\int \frac{1}{t+1} dt + \int \frac{2}{t} dt = -\int \frac{dt}{t+1} + 2\ln(t) + C =$$

$$= -\int \frac{d(t+1)}{t+1} + 2\ln(t) + C = -\ln(t+1) + 2\ln(t) + C$$

$$-\ln(t+1) + 2\ln(t) = -\ln(x_0) + C$$

$$C = -\ln(t+1) + 2\ln(t) + \ln(x_0)$$

$$C = \ln \left(\frac{x_0 t^2}{t+1} \right)$$

$$C = \frac{x_0 t^2}{t+1}$$

Обратная замена

$$t = \frac{y_0}{x_0}$$

$$C = \ln \left(\frac{x_0 \left(\frac{y_0}{x_0} - 1 \right)^3}{\left(\frac{y_0}{x_0} \right)^2} \right)$$

$$C = \frac{x_0 \left(\frac{y_0}{x_0} \right)^2}{\frac{y_0}{x_0} + 1}$$

$$C = \frac{x_0 y_0^2}{y_0 + x_0}$$

Обратная замена

$$\begin{cases} x_0 = x - 3 \\ y_0 = y + 2 \end{cases}$$

$$C = \frac{(x-3)(y+2)^2}{y+x-1}$$

Подпишитесь на новости vk.com/kontromat

По материалам сайта kontromat.ru

По материалам сайта kontromat.ru

По материалам сайта kontromat.ru

По материалам сайта kontromat.ru

Подпишись на новости vk.com/kontromat